Galois 定理与群论

普及篇

元数: 即群的阶数.

不变子群 (Invarient Subgruop): 即正规子群.

极大不变真子群: 类比于极大理想.

组合因数 (Composition Factors): 设 G_{i+1} 是 G_i 的极大不变真子群, 则 $|G_i|/|G_{i+1}|$ 称为 $G=G_0$ 的组合因数.

- 一个群分成一列极大不变真子群的分法可能不唯一, 但所得的组合因数是不变的.

可解群 (Solvable Group): 如果一个群的组合因数都是质数, 那么这个群称为可解群.

正规置换群 (Regular Substitution Group)

伽罗瓦函数: $V=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n$,

一定可以选择 m, 使得 x 的每种置换都改变函数的值, 将其记为 $V_1,V_2,\cdots,V_{n!}$, 令

$$P(y)\equiv(y-V_1)(y-V_2)\cdots(y-V_{n!}),$$

展开后在数域 $\mathbb{F}$ 中分解因数, 其中不可约的部分设为

$$(y-V_1)(y-V_2)=y^2-(V_1+V_2)y+V_1V_2,$$

则使之结果不变的置换构成群 $S_{n-2}\oplus\mathbb{Z}_2$, 称为 **方程在数域 $\mathbb{F}$ 中的群**.

假设这个不可约部分记作 $G(y)$, 则 $G(y)=0$ 称为 **伽罗瓦分解式**.

求方程在一个数域中的群的方法:

⭐ 若方程的<u>根的任意一个有理函数的值</u>在一个数域中, 且有理函数的系数也在这个数域中, 那么<u>方程在这个数域中的群</u>的一切置换不改变这个有理函数的值. 否则至少有一个置换可以改变其值.

- $x^3+cx+d=0$ 在有理数域中的群是 $\langle(123),(132)\rangle=S_3$.

如果方程在一个数域中的群是元数为素数的循环正规置换群, 则此方程有根式解.

$$x_1+\rho^kx_2+\rho^{2k}x_3+\cdots+\rho^{(n-1)k}x_n=\gamma_k.$$

辅助方程式的取法: $y^2=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2\cdots(x_{n-1}-x_n)^2$ (判别式), 当 $n=2$ 时, $(x_1-x_2)^2=b^2-4ac$.

抽象群: 所有同构的群是同一个抽象群.

基础篇

道路群

拓扑等价 (**同伦**): 若一条道路可以通过连续的变化变成另一条道路, 则称这两条道路拓扑等价, 或同伦.

- 道路的运算是结合的.

流形

- 同伦于道路 p 的道路类: $[p]$.

例子:

1. 一个圆周: $\langle [a] \rangle \approx \mathbb{Z}$.
2. 两个不环连的圆周: $\langle [a], [b] \rangle$ (不交换).
3. 两个环连的圆周: $\langle [a], [b] \rangle \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (交换).
   $[ab] = [a][b] = [b][a] = [ba]$.